Leçon 148 - Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.

Extrait du rapport de jury

Dans cette leçon, il est indispensable de présenter les résultats fondateurs de la théorie des espaces vectoriels de dimension finie en ayant une idée de leurs preuves. Il est en particulier important de savoir justifier pourquoi un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie est aussi de dimension finie.
On peut montrer, sur des exemples, comment la dimension finie intervient dans la démonstration de certains résultats (récurrence sur la dimension, égalité de sous-espaces par inclusion et égalité des dimensions, isomorphisme par injectivité et dimension, etc.). À cette occasion, on pourra signaler des résultats qui ne subsistent pas en dimension infinie. Le pivot de Gauss ainsi que les diverses notions et caractérisations du rang trouvent leur place dans cette leçon. Les applications sont nombreuses : existence de polynômes annulateurs, dimension de l'espace des formes n-linéaires alternées en dimension n, isomorphisme avec le dual dans le cadre euclidien et théorème de Riesz, espaces de solutions d'équations différentielles ordinaires, caractérisation des endomorphismes diagonalisables, décomposition d'isométries en produits de réflexions, dimensions des représentations irréductibles d'un groupe fini, théorie des corps finis, etc.
Les caractérisations du rang peuvent aussi être utilisées pour démontrer l'invariance du rang par extension de corps, ou pour établir des propriétés topologiques (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Pour aller plus loin, les candidates et candidats peuvent déterminer des degrés d'extensions dans la théorie des corps ou s'intéresser aux nombres algébriques. Il est également possible d'explorer des applications en analyse comme les extremas liés. Dans un autre registre, il est pertinent d'évoquer la méthode des moindres carrés dans cette leçon, par exemple en faisant ressortir la condition de rang maximal pour garantir l'unicité de la solution et s'orienter vers les techniques de décomposition en valeurs singulières pour le cas général. On peut alors naturellement analyser l'approximation d'une matrice par une suite de matrices de faible rang.

Présentation de la leçon

Je vais vous présenter la leçon 148 intitulée : "Dimension d'un espace vectoriel (on se limitera au cas de la dimension finie). Rang. Exemples et applications.". La théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie est fondamentale en mathématiques dans de nombreux domaines via les propriétés de réduction. La dimension finie permet également de considérer des bases et il est alors possible de connaître toutes les propriétés de l'espace à partir d'un nombre fini de points.
Dans une première partie on s'intéresse aux espaces vectoriels ainsi qu'à la théorie générale de la dimension. Tout d'abord on s'intéresse aux familles de vecteurs en rappelant la définition d'une famille libre ainsi que génératrice ainsi que quelques propriétés fondamentales ainsi que des premiers exemples. On passe ensuite à la définition d'une base qui est une famille à la fois libre et génératrice. Elle hérite donc des propriétés des familles libres et génératrice et certaines bases sont très classiques et sont appelées bases canoniques. Les bases sont donc des outils très puissants et l'existence de base nous serait d'une aide précieuse dans beaucoup de situations. On montre dans un deuxième point qu'en dimension finie il existe toujours des bases et que l'on peut les construire à partir des familles libres ou génératrices. Enfin dans un troisième point on rentre vraiment dans le sujet en parlant de la dimension. On commence par en donner une définition ainsi que deux exemples puis on donne des relations avec les familles libres et génératrices en termes de cardinaux ainsi qu'une caractérisation par les familles libres et génératrices et enfin on termine en regardant le comportement de la dimension vis-à-vis de la somme d'espaces vectoriels.
Dans une deuxième partie on traite du rang en commençant par celui d'une application linéaire. On commence en donnant la définition du rang d'une application linéaire avant de passer au théorème du rang qui est très utile en pratique et qui donne le théorème 31. On continue par faire le lien entre le rang d'une matrice et d'une application linéaire et ensuite on fait également le lien avec les classes d'équivalences avant de passer à des techniques de calculs de rang.
On s'intéresse dans une troisième partie aux formes linéaires et hyperplans en dimension finie. On commence par donner une caractérisation d'une forme linéaire en dimension finie avant de faire le lien entre les hyperplans et la dimension.
Enfin on s'intéresse dans une dernière partie aux conséquences de la dimension finie dans divers domaines des mathématiques. On commence en faisant le lien avec le déterminant et en donnant une caractérisation d'être une base puis on donne un ensemble minimisant une certaine norme sous contrainte. On continue avec le cas des espaces vectoriels normés avec avec l'équivalence des normes en dimension finie puis le théorème de Riesz. Dans une troisième sous-partie on s'intéresse aux formes quadratiques avec la signature d'une forme quadratique, le lien entre s et t avec les dimensions des sous-espaces vectoriels ainsi que le théorème d'inertie de Sylvester. Dans un quatrième point on s'intéresse à un exemple où l'on utilise une récurrence sur la dimension pour obtenir un résultat avec le cas des isométries vectorielles. On traite tout d'abord le cas de la dimension 2 qui sert d'initialisation au cas général puis ensuite

le cas de la dimension n. Enfin dans un dernier point on parle d'extension de corps et de nombres algébriques en commençant par rappeler la définition d'une extension de corps ainsi que du degré d'une extension qui est vue comme la dimension du "grand" corps sur le "petit" ainsi que quelques exemples. On énonce ensuite le théorème de la base télescopique en théorème 75 qui nous donne la multiplicativité du degré et dont la démonstration repose sur la définition d'une base et on termine par les éléments algébriques avec une caractérisation très utilisée en pratique sur la dimension de $\mathbb{K}[\alpha]$.

Plan général

I - Espaces vectoriels et dimension
1 - Famille de vecteurs
2 - Existence de bases
3 - Dimension

II - Rang
1 - Rang d'une application linéaire
2 - Rang d'une matrice

III - Formes linéaires et hyperplans
1 - Expression d'une forme linéaire dans une base
2 - Hyperplans vectoriels et dimension finie

IV - Les conséquences de la dimension finie
1 - Lien avec le déterminant
2 - Dans les espaces vectoriels normés
3 - Formes quadratiques sur $\mathbb{R}$
4 - Réduction des isométries vectorielles
5 - Extension de corps et nombres algébriques

Cours détaillé

Dans toute cette leçon, on considère $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I Espaces vectoriels et dimension

I.1 Famille de vecteurs

Définition 1 : Famille génératrice [Deschamps (1), p.1037] :
On dit qu'une famille $\mathcal{G}$ est une **famille génératrice de** E lorsque $E = \text{Vect}(\mathcal{G})$.

Proposition 2 : [Deschamps (1), p.1037]
Soit $\mathcal{G} = (g_1, ..., g_n)$ une famille d'éléments de E.
La famille $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E si, et seulement si,

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ g_i \in E \text{ et } \forall x \in E,\ \exists (\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n \text{ tq } x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$$

Exemple 3 : [Deschamps (1), p.1037]
$*$ La famille $(1, i)$ est génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
$*$ La famille $((1, 1), (1, -1))$ est génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Définition 4 : Famille libre [Deschamps (1), p.1040] :
On considère $(x_1, ..., x_n)$ des éléments de E.
On dit que la famille $(x_1, ..., x_n)$ est une **famille libre de** E lorsque :

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0 \implies \forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = 0$$

Théorème 5 : [Deschamps (1), p.1044]
Soit $(x_1, ..., x_n)$ une famille d'éléments de E.
Pour tout $(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ on a :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i \implies \forall i \in [\![1;n]\!],\ \lambda_i = \mu_i$$

Exemple 6 : [Deschamps (1), p.1041]
$*$ La famille $(1, i)$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
$*$ La famille $((1, 0, 0), (0, 0, 1))$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

Définition 7 : Base [Deschamps (1), p.1047] :
On appelle **base de** E toute famille qui est à la fois libre et génératrice de E.

Théorème 8 : [Deschamps (1), p.1047]
Si E possède une base $(e_1, ..., e_n)$, alors pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Exemple 9 : [Deschamps (1), p.1048]
∗ La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.
∗ La famille $e = (e_1, ..., e_n)$ définie par $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, ... et $e_n = (0, ..., 0, 1)$ est une base de $\mathbb{K}^n$ appelée **base canonique de** $\mathbb{K}^n$.
∗ La famille $(1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ appelée **base canonique de** $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 10 : [Deschamps (1), p.1048]
∗ Dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, l'égalité $(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ montre que les composantes du vecteur $x = (x_1, ..., x_n)$ dans cette base sont les coefficients du n-uplet $(x_1, ..., x_n)$.
∗ Dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, les coordonnées d'un polynôme sont ses coefficients.

I.2 Existence de base

Définition 11 : Dimension finie [Deschamps (1), p.1090] :
On dit que E est de **dimension finie** lorsqu'il admet une famille génératrice finie.
Dans le cas contraire, on dit que E est de **dimension infinie**.

Exemple 12 : [Deschamps (1), p.1090]
∗ Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension finie car engendré par $(1, i)$.
∗ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est de dimension finie car admet une base finie (sa base canonique).
∗ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$ est de dimension finie car admet une base finie (sa base canonique).
∗ Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Théorème 13 : Théorème de la base extraite [Deschamps (1), p.1091] :
Si E est de dimension finie, alors de toute famille génératrice finie de E on peut en extraire une base de E.

Corollaire 14 : [Deschamps (1), p.1091]
Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet une base finie.

Théorème 15 : Théorème de la base incomplète [Deschamps (1), p.1091] :
Si E est de dimension finie, alors toute famille libre finie de E peut être complété en une base de E.

I.3 Dimension

Théorème 16 : [Deschamps (1), p.1092]
Si E est de dimension finie, alors toutes les bases de E sont finies et ont le même nombre d'élément n. Cet entier n est alors appelé **dimension de** E **sur** $\mathbb{K}$

Exemple 17 : [Deschamps (1), p.1092]
∗ Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est de dimension 2 car il admet pour base $(1, i)$.
∗ Le sous-espace vectoriel $F = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \text{ tq } x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^4$ est de dimension 3.

Proposition 18 : [Deschamps (1), p.1094]
Si E est de dimension n, alors :
∗ Toute famille génératrice de E a au minimum n éléments.
∗ Toute famille libre de E a au maximum n éléments.

Remarque 19 :
En particulier, le cardinal d'une famille libre est donc toujours inférieur ou égal au cardinal d'une famille génératrice.

Théorème 20 : [Deschamps (1), p.1094]
Soit e une famille d'éléments de E.
Si E est de dimension n, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
∗ e est une base de E. ∗ e est libre et possède n éléments.
∗ e est génératrice et possède n éléments.

Théorème 21 : [Deschamps (1), p.1096]
Si E est de dimension n, alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie $p \leq n$.
De plus, on a $F = E$ si, et seulement si, $p = n$.

Proposition 22 : [Deschamps (1), p.1098]
Si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel F de E admet au moins un supplémentaire.

Proposition 23 : [Deschamps (1), p.1099]
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
Si E est de dimension finie et que F et G sont supplémentaires, alors on a la formule $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$

Définition 24 : Décomposition de Fitting [Caldero, p.74] :
La donnée de $((F, G), v, w)$ où $F = \text{Ker}\left(u^{n_0}\right)$, $G = \text{Im}\left(u^{n_0}\right)$, $v = u|_F$ et $w = u|_G$ avec $E = F \oplus G$, v nilpotent et w un automorphisme est appelée **décomposition de Fitting**.

Théorème 25 : [Caldero, p.74]
Si $\mathbb{K}$ est un corps fini commutatif de cardinal q, alors il y a $n_d = q^{d(d-1)}$ matrices nilpotentes de taille $d \times d$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 26 : Formule de Grassmann [Deschamps (1), p.1099] :
Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies de E, alors on a $\dim_{\mathbb{K}}(F+G) + \dim_{\mathbb{K}}(F \cap G) = \dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}(G)$.

Proposition 27 : [Deschamps (1), p.1101]
Soient $E_1, ..., E_p$ des sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies.
La somme $E_1 + ... + E_p$ est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}\left(\sum_{i=1}^n E_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \dim_{\mathbb{K}}(E_i)$ avec égalité si, et seulement si, la somme est directe.

II Rang

II.1 Rang d'une application linéaire

Dans toute cette sous-partie, on considère F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

Définition 28 : Rang d'une application linéaire [Deschamps (1), p.1102] :
On dit que u est de **rang fini** lorsque son image est de dimension finie.
On appelle alors **rang de** u (noté $\mathrm{rg}(u)$) la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.

Théorème 29 : Théorème du rang [Deschamps (1), p.1103] :
Si E est de dimension finie, alors l'endomorphisme u est de rang fini et on a $\dim_{\mathbb{K}}(E) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$.

Exemple 30 : [Deschamps (1), p.1104]
On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Par la formule du rang, on a $\mathrm{rg}(\Delta) = n$.

Théorème 31 : [Deschamps (1), p.1104]
Si E et F sont de même dimension finie, alors les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ u est injective. $*$ u est surjective. $*$ u est bijective.

Remarque 32 : [Deschamps (1), p.1105]
Ce résultat ne subsiste pas en dimension infinie. En effet les endomorphismes de $\mathbb{R}[X]$ $u : P(X) \longmapsto XP(X)$ et $v : P(X) \longmapsto P'(X)$ sont respectivement injective et surjective uniquement.

Corollaire 33 :
Deux espaces vectoriels sont isomorphes si, et seulement si, ils ont la même dimension.

Exemple 34 : [Deschamps (1), p.1105]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 35 : [Deschamps (1), p.1106]
Si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E,F)$ est également de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}(E,F)) = \dim_{\mathbb{K}}(E)\dim_{\mathbb{K}}(F)$.

II.2 Rang d'une matrice

Dans toute cette sous-partie, on considère $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Définition 36 : Rang d'une matrice [Deschamps (1), p.1159] :
On appelle **rang de** A le rang de la famille des vecteurs colonnes de A.

Proposition 37 : [Deschamps (1), p.1159]
Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et e et f deux bases respectives de E et F.
Le rang d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est égal au rang de la matrice $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Proposition 38 : [Deschamps (1), p.1159]
$*$ $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{rg}(A) = n$. $*$ $\mathrm{rg}(A) \leq \min(n,p)$.

On note désormais J_r la matrice, écrite par blocs, $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec $r \leq \min(n,p)$.

Proposition 39 : [Deschamps (1), p.1160]
La matrice A est de rang r si, et seulement si, elle est équivalente à la matrice J_r.

Corollaire 40 : [Deschamps (1), p.1160]
Deux matrices sont équivalentes si, et seulement si, elles ont le même rang.

Proposition 41 : [Deschamps (1), p.1160]
La rang d'une matrice est égal au rang de sa transposée.

Proposition 42 : [Deschamps (1), p.1160]
Le rang de la matrice A est égal :
$*$ Au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.
$*$ Au rang de la famille de ses vecteurs lignes.
$*$ Au rang de toute application linéaire qu'elle représente.
$*$ Au rang de toute famille de vecteurs qu'elle représente.

Proposition 43 : [Deschamps (1), p.1161]
Si A est de rang r, alors toute sous-matrice de A est de rang au plus r.

Proposition 44 : [Deschamps (1), p.1161]
Le rang de A est égal à r si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont réalisées :
* On peut trouver dans A une sous-matrice $r \times r$ inversible.
* Aucune sous-matrice $s \times s$ de A, avec $s > r$, n'est inversible.

Remarque 45 : [Deschamps (1), p.1161]
Autrement dit, le rang de A est égal à la plus grande taille des sous-matrices carrées inversibles extraites de A.

III Formes linéaires et hyperplans

Dans toute cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

III.1 Expression d'une forme linéaire dans une base

Proposition 46 : [Deschamps (1), p.1107]
Soit $(e_1, ..., e_n)$ une base de l'espace vectoriel E.
Une application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire si, et seulement si, il existe $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i e_i^*$.

Exemple 47 : [Deschamps (1), p.1107]
On considère f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ par $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2$.
Dans la base $((1,1),(1,-1))$, on a $f(x) = 2x_1'$ $(x = (x_1, x_2) = x_1'(1,1) + x_2'(1,-1))$.

III.2 Hyperplans vectoriels et dimension finie

Proposition 48 : [Deschamps (1), p.1107]
Un sous-espace vectoriel H de l'espace vectoriel E est un hyperplan si, et seulement si, $\dim_{\mathbb{K}}(H) = \dim_{\mathbb{K}}(E) - 1$.

Exemple 49 : [Deschamps (1), p.1107]
* En dimension 2, les hyperplans sont les droites vectorielles.
* En dimension 3, les hyperplans sont les sous-espaces vectoriels de dimension 2 (et donc les plans vectoriels).

Corollaire 50 : [Deschamps (1), p.1108]
Une partie H de E est un hyperplan si, et seulement si, il existe une famille $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{K}^n$ de scalaires non tous nuls telle que :

$$\forall x \in E, \left(x \in H \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \right)$$

Corollaire 51 : [Deschamps (1), p.1108]
Soient $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{K}^n \backslash \{0, ..., 0\}$.
Les hyperplans d'équations respectives $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n b_i x_i = 0$ sont égaux si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $(b_1, ..., b_n) = \lambda(a_1, ..., a_n)$.

Proposition 52 : [Deschamps (1), p.1109]
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ ainsi que $H_1, ..., H_m$ des hyperplans de E.
On a $\dim_{\mathbb{K}} \left(\bigcap_{i=1}^m H_i\right) \geq \dim_{\mathbb{K}}(E) - m$.
De plus, on a égalité si, et seulement si, la famille des formes linéaires $(\varphi_1, ..., \varphi_m)$ associées aux hyperplans est libre.

Proposition 53 : [Deschamps (1), p.1109]
Soit $m \in \mathbb{N}^*$.
Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim_{\mathbb{K}}(F) = n - m$, alors il existe m hyperplans $H_1, ..., H_m$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^m H_i$.

IV Les conséquences de la dimension finie

Dans toute cette partie, on suppose que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

IV.1 Lien avec le déterminant

Théorème 54 : [Deschamps (1), p.1237]
L'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées est de dimension 1 et engendré par l'application :

$$\det_{\mathcal{B}} : \left| \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, ..., x_n) & \longmapsto & \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n x_{\sigma(i),i} \end{array} \right.$$

Définition 55 : Déterminant d'une famille de vecteurs [Deschamps (1), p.1239] :
$\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui vaut 1 en $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ base de E. On dit alors que $\det_{\mathcal{B}}(x_1, ..., x_n)$ est le **déterminant dans la base $\mathcal{B}$ de la famille** $(x_1, ..., x_n)$.

Théorème 56 : [Deschamps (1), p.1239]
Soient e une base de E et $(u_1, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de E.
La famille $(u_1, ..., u_n)$ est une base de E si, et seulement si, $\det_e(u_1, ..., u_n) \neq 0$.

Dans toute la suite de cette sous-partie, on suppose E de dimension finie et on considère U un ouvert non vide de E, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi qu'un point $a \in U$.

Théorème 57 : Théorème des extrema liés [Gourdon, p.337] :
Soient $f, g_1, ..., g_r$ des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur l'ouvert U de E et $\Gamma = \{x \in U \text{ tq } g_1(x) = ... = g_r(x) = 0\}$.
Si $f|_\Gamma$ admet un extremum relatif en $c \in \Gamma$ et si $dg_{1,c}, ..., dg_{r,c}$ sont linéairement indépendants, alors il existe $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{R}$ (uniques et appelés **multiplicateurs de Lagrange**) tels que $df_c = \sum_{i=1}^r \lambda_i dg_{i,c}$.

Exemple 58 : [Gourdon, p.339]
Il est possible de retrouver l'inégalité arithmético-géométrique à partir du théorème des extrema liés.

Développement 1 : [cf. GOURDON]

Lemme 59 : [Gourdon, p.330]
Soient E,F et G trois espace vectoriels de dimension finie et $\varphi : E\times F \longrightarrow G$ une application bilinéaire.
L'application φ est différentiable sur $E \times F$ et :

$$\forall (x, y) \in E \times F,\ \forall (h, k) \in E \times F,\ d\varphi_{(x,y)}(h, k) = \varphi(x, k) + \varphi(h, y)$$

Proposition 60 : [Gourdon, p.332]
Le déterminant est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ d(\det)_M(H) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Com}(M)^\intercal H\right)$$

Proposition 61 : [Gourdon, p.341]
Si l'on munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_2 : M \longrightarrow \left(\sum_{i,j=1}^n m_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, alors le groupe des matrices orthogonales directes de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des éléments de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ de norme minimale.

IV.2 Dans les espaces vectoriels normés

Théorème 62 : [Deschamps (2), p.299]
Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Développement 2 : [cf. DESCHAMPS (2) + HASSAN]

Théorème 63 : [Deschamps (2), p.301]
Si E est de dimension finie, alors les parties compactes de E sont exactement ses parties fermées bornées.

Remarque 64 : [Deschamps (2), p.292]
Le résultat est faux en dimension infinie !
En effet, dans $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|_\infty)$, on peut considérer la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est incluse dans la boule unité fermée mais qui est 1-écartée, donc ne peut pas admettre de sous-suite convergente.

Lemme 65 : Lemme de Riesz [Hassan, p.343] :
Soit M un sous-espace vectoriel fermé strict de E.
On a la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists u \in E \text{ tq } \|u\| = 1 \text{ et } d(u, M) \geq 1 - \varepsilon$$

Théorème 66 : Théorème de Riesz [Hassan, p.343] :
Les assertions suivantes sont équivalentes :
* E est de dimension finie.
* La boule unité fermée $\mathcal{B}_f(0, 1)$ de $(E, \|\cdot\|)$ est compacte.

IV.3 Formes quadratiques sur $\mathbb{R}$

Dans toute cette sous-partie, on suppose E de dimension finie et considère q une forme quadratique sur E.

Théorème 67 : [Rombaldi, p.468]
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
$*$ On a $\dim_{\mathbb{K}}(F) + \dim_{\mathbb{K}}\left(F^{\perp}\right) \geq \dim_{\mathbb{K}}(E)$ avec égalité lorsque q est non dégénérée.
$*$ On a $E = F \oplus F^{\perp}$ si, et seulement si, $q|_F$ est non dégénérée.

Théorème 68 : [Rombaldi, p.476]
Il existe un unique couple (s,t) d'entiers naturels tels que, pour toute base q-orthogonale $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ de E on ait $s = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) > 0\})$ et $t = \mathrm{Card}(\{i \in [\![1;n]\!] \text{ tq } q(e_i) < 0\})$.
De plus, on a la relation $s + t = \mathrm{rg}(q)$.

Théorème 69 : [Rombaldi, p.477]
Si l'on considère l'ensemble $\mathcal{P} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie positive}\}$ ainsi que l'ensemble $\mathcal{N} = \{F \text{ s.e.v. tq } q|_F \text{ définie négative}\}$, alors la signature (s,t) de q est donnée par :

$$s = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{P}} \dim(F) \text{ sinon} \end{array} \right. \quad \text{et } t = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max\limits_{F\in\mathcal{N}} \dim(F) \text{ sinon} \end{array} \right.$$

Théorème 70 : Théorème d'inertie de Sylvester [Rombaldi, p.477]
Si q est de signature (s,t), alors il existe $\ell_1, ..., \ell_{s+t}$ des formes linéaires indépendantes telles que $q = \sum_{i=1}^{s} \ell_i^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} \ell_j^2$ et il existe une base q-orthogonale de E dans laquelle la matrice de q est $D = \mathrm{diag}(I_s, I_t, 0)$.

Exemple 71 : [Rombaldi, p.485]
On considère la forme quadratique q définie sur $\mathbb{R}^3$ par la relation suivante : $q(x,y,z) = -x^2 - y^2 - z^2 + 2(xy + xz + yz)$.
On a alors $q(x,y,z) = -(x-y-z)^2 + (y+z)^2 - (y-z)^2$.

IV.4 Réduction des isométries vectorielles

Dans toute cette sous-partie, on munit E d'une structure d'espace euclidien.

Définition 72 : Isométrie vectorielle [Deschamps (1), p.1318]
On considère f un endomorphisme u de E.
On dit que f est une **isométrie vectorielle** lorsque pour tout $x \in E$, on a la relation $\|f(x)\|_E = \|x\|_E$.

On note $\mathrm{O}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ constitué des isométries vectorielles.

Proposition 73 : [Deschamps (1), p.1326]
Soit f une isométrie de E.
Si E est un espace euclidien de dimension 2, alors :
$*$ Si $\det(f) = 1$, alors pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
$*$ Si $\det(f) = -1$, alors il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire 74 : [Deschamps (1), p.1326]
En dimension 2, le groupe $\mathrm{SO}(E)$ est isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1 (et donc commutatif).

Théorème 75 : [Deschamps (2), p.840]
Soit f une isométrie de E.
Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est égale à une matrice diagonale par blocs :
$*$ de taille 1 de la forme (γ) avec $\gamma \in \{-1; 1\}$.
$*$ de taille 2 de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \text{ avec } \theta \in]-\pi\ 0[\cup]0;\pi[$$

IV.5 Extension de corps et nombres algébriques

Définition 76 : Extension de corps [Perrin, p.65] :
On considère et $\mathbb{L}$ un corps commutatif quelconque.
On dit que $\mathbb{L}$ est une **extension de corps de** $\mathbb{K}$ lorsque $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ et on la note $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.

Exemple 77 : [Perrin, p.65]
$*$ $\mathbb{C}$ est une extension de corps de $\mathbb{R}$.
$*$ $\mathbb{Q}(i)$ est une extension de corps de $\mathbb{Q}$.

Définition 78 : Degré d'un extension de corps [Perrin, p.65] :
On considère une extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$.
On appelle **degré de l'extension** $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ la dimension de $\mathbb{L}$ vu comme $\mathbb{K}$-espace vectoriel et on la note $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{L}$ (ou encore $[\mathbb{L} : \mathbb{K}]$).

Exemple 79 :
$*$ $\mathbb{C}$ est une extension de corps de $\mathbb{R}$ de degré 2.
$*$ $\mathbb{Q}(i)$ est une extension de corps de $\mathbb{Q}$ de degré 2.
$*$ $\mathbb{R}$ est une extension de corps de $\mathbb{Q}$ de degré infini (car $\mathbb{Q}$ est dénombrable).

Théorème 80 : Théorème de la base télescopique [Perrin, p.65] :
Soient $\mathbb{K}$, $\mathbb{L}$ et $\mathbb{M}$ trois corps commutatifs quelconques tels que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{M}$.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une $\mathbb{K}$-base de $\mathbb{L}$ et $(f_j)_{j\in J}$ une $\mathbb{L}$-base de $\mathbb{M}$, alors $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ en temps de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On a alors en particulier : $[\mathbb{M} : \mathbb{K}] = [\mathbb{M} : \mathbb{L}][\mathbb{L} : \mathbb{K}]$.

Définition 81 : Élément algébrique/transcendant [Perrin, p.66] :
On considère une extension de corps $\mathbb{L}/\mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{L}$ ainsi que le morphisme $\varphi : \mathbb{K}[T] \longrightarrow \mathbb{L}$ tel que $\varphi|_{\mathbb{K}} = \mathrm{Id}_{\mathbb{K}}$ et $\varphi(T) = \alpha$.
$*$ Lorsque φ est injectif, il n'y a que le polynôme nul qui s'annule en α. On dit alors que α est **transcendant sur** $\mathbb{K}$.
$*$ Lorsque φ n'est pas injectif, il existe $\mu_\alpha \in \mathbb{K}[T]$ non nul unitaire tel que $\mathrm{Ker}(\varphi) = (\mu_\alpha)$. On dit alors que α est **algébrique sur** $\mathbb{K}$ et que μ_α est le **polynôme minimal de** α **sur** $\mathbb{K}$.

Exemple 82 : [Perrin, p.66]
$*$ Les nombres $\sqrt{2}$, i et $\sqrt[3]{2}$ sont algébriques sur $\mathbb{Q}$ de polynômes minimaux respectifs $X^2 - 2$, $X^2 + 1$ et $X^3 - 2$.
$*$ Les nombres π et e sont transcendants sur $\mathbb{Q}$ (mais pas sur $\mathbb{R}$) [ADMIS].

Proposition 83 : Caractérisation des éléments algébriques [Perrin, p.66] :
Soient $\mathbb{L}/\mathbb{K}$ une extension de corps et $\alpha \in \mathbb{L}$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :
$*$ α est algébrique sur $\mathbb{K}$. $*$ On a $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.
$*$ On a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] < +\infty$ (plus précisément, $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] = \deg(\mu_\alpha)$).
$*$ Il existe un unique polynôme $\mu_\alpha \in \mathbb{K}[X]$ unitaire et irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $\mu_\alpha(\alpha) = 0_{\mathbb{K}}$.
$*$ $\mathbb{K}(\alpha) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1_{\mathbb{K}}, \alpha, \alpha^2, ..., \alpha^{\deg(\mu_\alpha)-1})$.

Remarques sur la leçon

— L'équivalence des normes en dimension finie est très importante car elle possède de nombreux corollaires cruciaux (applications linéaires continues, sous-espaces vectoriels fermés, etc.).

— Il faut mettre des résultats qui utilisent une récurrence sur la dimension de l'espace (co-diagonalisabilité, classification des isométries, théorème de Cartan-Dieudonné, etc.).

Liste des développements possibles

— Dénombrement des endomorphismes nilpotents sur un corps fini.

— Matrices minimisant la norme sur $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

— Théorème de Riesz.

— Loi d'inertie de Sylvester et classification des formes quadratiques sur $\mathbb{R}$.

Bibliographie

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MPSI*.

— Philippe Caldero, *Carnet de voyage en Algébrie*.

— Xavier Gourdon, *Les maths en tête, Analyse*.

— Claude Deschamps, *Tout-en-un MP/MP**.

— Nawfal El Hage Hassan, *Topologie générale et espaces normés*.

— Jean-Étienne Rombaldi, *Mathématiques pour l'agrégation, Algèbre et Géométrie*.

— Daniel Perrin, *Cours d'algèbre*.